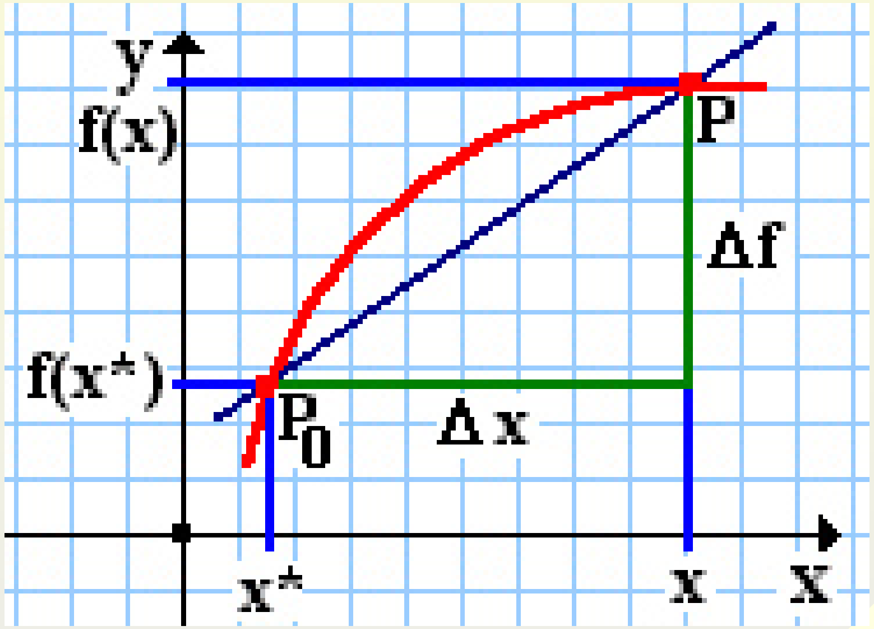
DERIVATA di una funzione

Sia $f : A \rightarrow R$ e $x^* \in A$

punto di accumulazione

di A



$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*}$$ **è il RAPPORTO INCREMENTALE**

Il rapporto incrementale di f calcolato in x* rappresenta il <u>coefficiente angolare</u> della secante passante per i punti P_0 e P

Se **esiste** ed è **finito** il

$$\lim_{x \to x^*} \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*}$$

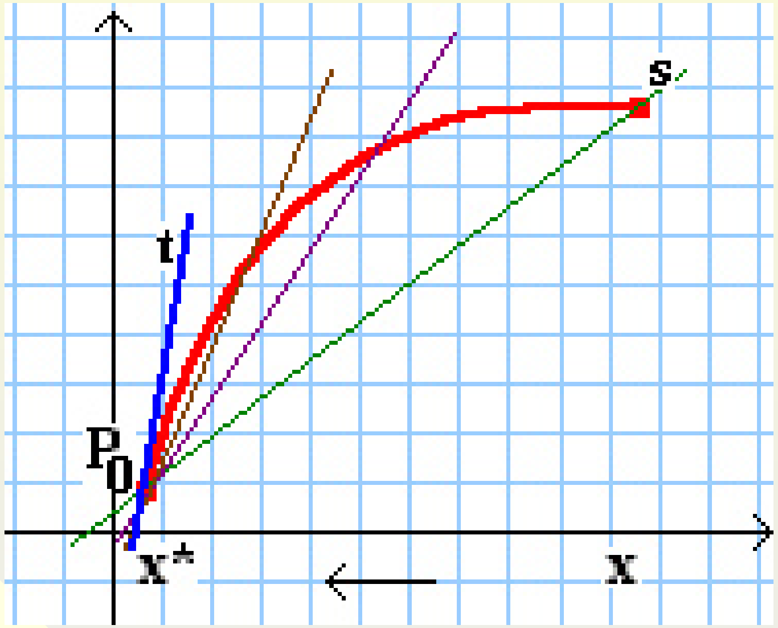
allora **f è derivabile in x***;

il valore finito del limite si chiama **DERIVATA** di f in x* e si indica con

$$f'(x^*) \quad \text{o} \quad \left.\frac{df}{dx}\right|_{x^*}$$

Significato GEOMETRICO della derivata

*f derivabile in x**



$x \to x^* \Rightarrow s \to t$

$\Downarrow$

$$\frac{f(x)-f(x^*)}{x-x^*} = m_s \to m_t$$

$x \to x^*$

$\Downarrow$

$$\frac{f(x)-f(x^*)}{x-x^*} \to f'(x^*)$$

$\Downarrow$

$$f'(x^*) = m_t$$

La <u>derivata</u> di f in x* rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente alla curva nel punto P*=(x*,f(x*))

Sia $f: A \to R$ e x* ∈ A

Se <u>f è derivabile</u> in x*, la curva y=f(x)

è dotata di <u>retta tangente</u> nel punto

P*=(x*,f(x*)) e l'equazione di tale retta è

$$y = f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*)$$

ESEMPIO

$C=C(q)$ **Costo che un'impresa deve sostenere per produrre una certa quantità q di merce (*costo in funzione della quantità*)**

$$\frac{C(q)-C(q^*)}{q-q^*}$$

Rapporto incrementale di C(q) cioè rapporto tra la variazione del costo di produzione e la variazione della quantità prodotta, quando l'impresa passa da una produzione q* ad una produzione q (*tasso di variazione dei costi*)

$$C'(q^*) = \\ = \lim_{q \to q^*} \frac{C(q)-C(q^*)}{q-q^*}$$

Variazione di C relativa ad una variazione "infinitesima" di q (*costo marginale in q)**

Sia $f : A \to R$ e $x^* \in$ A punto di accumulazione di A

Si dice che f è differenziabile in x*

se ∃a∈R: $$\lim_{x \to x^*} \frac{f(x) - f(x^*) - a(x - x^*)}{x - x^*} = 0$$

a(x-x*) **si chiama DIFFERENZIALE di f in x***

$$\text{NB} : \text{f differenziabile} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x^*} \left[f(x) - f(x^*) - a(x - x^*) \right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x^*} \left[f(x) - f(x^*) \right] = \lim_{x \to x^*} a(x - x^*) = 0$$

f differenziabile ⇒ f continua

f differenziabile in x* ⇔ f derivabile in x*

⇒

$$\text{f differenziabile in } x^* \Rightarrow \exists a \in R:$$

$$\lim_{x \to x^*} \frac{f(x) - f(x^*) - a(x - x^*)}{x - x^*} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x^*} \left[\frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*} - a \right] = 0 \Rightarrow \lim_{x \to x^*} \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*} = a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{f derivabile in } x^* \text{ e } f'(x^*) = a$$

⇐

$$\text{f derivabile in } x^* \Rightarrow$$

$$\lim_{x \to x^*} \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*} - f'(x^*) \frac{x - x^*}{x - x^*} = 0 \Rightarrow$$

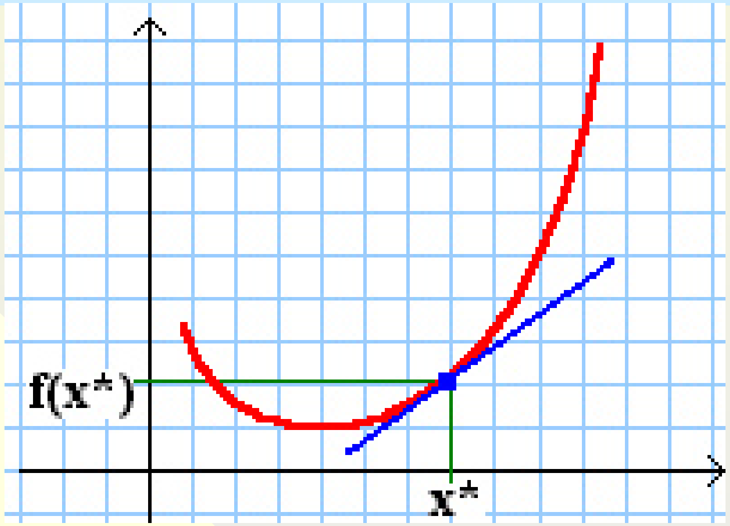
$$\Rightarrow \lim_{x \to x^*} \frac{f(x) - f(x^*) - f'(x^*)(x - x^*)}{x - x^*} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{f differenziabile in } x^* \text{ e } a = f'(x^*)$$

Se f è differenziabile in x*

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to x^*}\frac{f(x)-\{f(x^*)+f'(x^*)(x-x^*)\}}{x-x^*}=0$$



Da un punto di vista geometrico questo significa che se f è differenziabile in x*, nei punti "vicini" ad x*, la curva è ben approssimata dalla retta ad essa tangente in (x*,f(x*))

Sia $f : A \to R$ e x* $\in$ A

f derivabile in x*

$\Updownarrow$

f differenziabile in x*

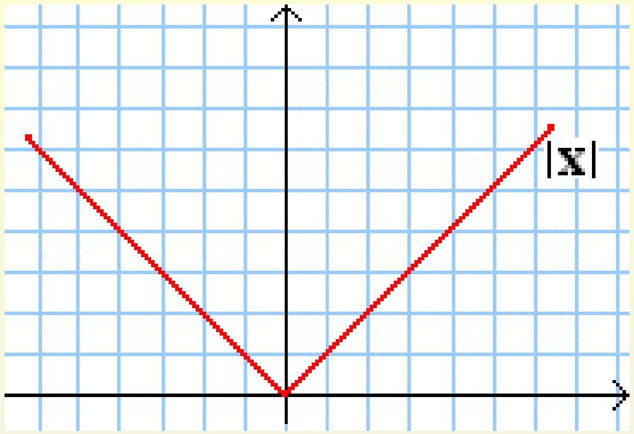
$\Downarrow$

f continua in x*

NB: f continua in x* $\not\Rightarrow$ f derivabile in x*

ESEMPIO 1

$$f(x) = |x|$$



$$\lim_{x\to 0} |x| = 0 \Rightarrow f(x) = |x| \text{ è continua in } x^* = 0$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x\to 0} \frac{|x| - 0}{x - 0} \nexists \text{ infatti}$$

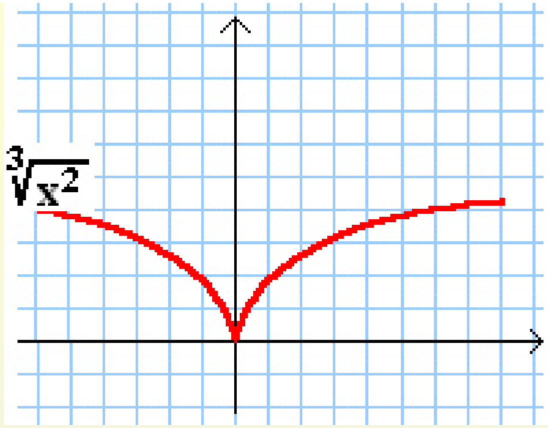
$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1 \neq \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$

$f(x) = |x|$ è continua in $x^* = 0$ ma non è derivabile in quel punto

Il punto $x^* = 0$ si chiama punto angoloso

ESEMPIO 2

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}$$



$$\lim_{x \to 0} \sqrt[3]{x^2} = 0 \Rightarrow f(x) = \sqrt[3]{x^2} \text{ è continua in } x^* = 0$$

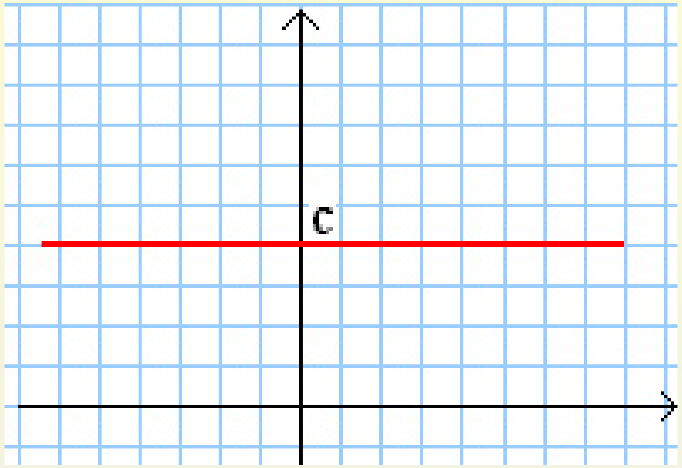
$$\lim_{\Lambda x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \nexists \quad \text{infatti}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty \neq \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = -\infty$$

$f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ è continua in x*=0 ma non è derivabile in quel punto

Il punto x*=0 si chiama cuspide

Calcolo della derivata di alcune funzioni elementari



1) Sia f(x)=c

f:$\Re \rightarrow \Re$

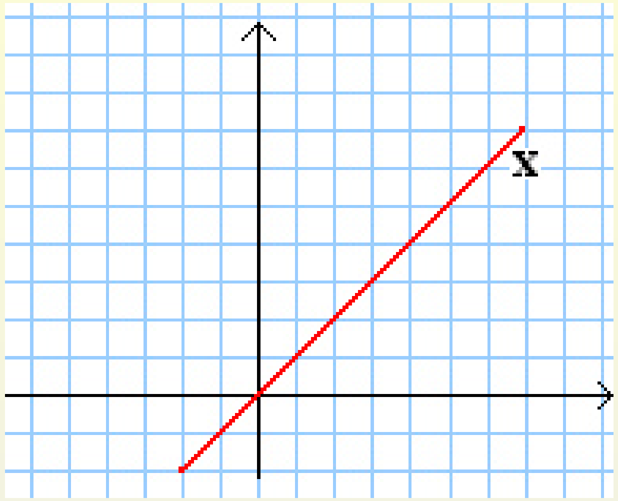
$$\forall x^* \in R, \quad \lim_{x \to x^*} \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*} = \lim_{x \to x^*} \frac{c - c}{x - x^*} =$$

$$= \lim_{x \to x^*} \frac{0}{x - x^*} = 0$$

f è derivabile $\forall x^* \in R$ e la sua derivata è <u>zero</u> $\forall x^* \in R$; resta quindi definita una nuova funzione f':$\Re \rightarrow \Re$, derivata di f : f'(x)=0 $\forall x \in R$

2) Sia f(x)=x

f:ℜ→ℜ



$$\forall x^* \in R, \quad \lim_{x \to x^*} \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*} = \lim_{x \to x^*} \frac{x - x^*}{x - x^*} =$$

$$= \lim_{x \to x^*} 1 = 1$$

f è derivabile ∀x*∈R

La funzione f’:ℜ→ℜ, derivata di f è f’(x)=1 ∀x∈R

3) Sia $f(x) = x^n$

$f: \Re \to \Re$

$$\forall x^* \in R, \quad \lim_{x \to x^*} \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*} = \lim_{x \to x^*} \frac{x^n - (x^*)^n}{x - x^*} =$$

$$= \lim_{x \to x^*} \frac{(x - x^*)(x^{n-1} + x^{n-2}x^* + \ldots + (x^*)^{n-1})}{x - x^*} = n(x^*)^{n-1}$$

f è derivabile $\forall x^* \in R$

La funzione $f': \Re \to \Re$, derivata di f è

$f'(x) = nx^{n-1} \; \forall x \in R$

NB: una funzione $f:A \rightarrow R$ si dice

derivabile (differenziabile) in A

se **è derivabile (differenziabile)** $\forall x^* \in A$

In maniera analoga alla precedente,

in base a definizione,

si possono calcolare le derivate delle altre funzioni elementari e compilare la seguente

tabella riepilogativa delle derivate di funzioni elementari

TABELLA DELLE DERIVATE DI ALCUNE FUNZIONI ELEMENTARI

$f(x)$	$f'(x)$	
c	0	$x \in R$
x^n	nx^{n-1}	$x \in R, n \in Z - \{0\}$
x^c	cx^{c-1}	$x \in R_*^+, c \in R - \{0\}$
a^x	$a^x \ln a$	$x \in R, a \in R_*^+ - \{1\}$
e^x	e^x	$x \in R$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$	$x \in R$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$	$x \in R$
tgx	$1/\cos^2 x$	$x \in R - \{\pi/2 + k\pi, k \in Z\}$

REGOLE di derivazione (ricavate utilizzando la definizione di derivata)

Siano f,g:A→R e derivabili in x*

- $f \pm g$ è derivabile in x* e

$$(f \pm g)'(x^*) = f'(x^*) \pm g'(x^*)$$

- $f \cdot g$ è derivabile in x* e

$$(f \cdot g)'(x^*) = f'(x^*)\,g(x^*) + f(x^*)\,g'(x^*)$$

- se inoltre $g(x^*) \neq 0$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ è derivabile in x* e

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'(x^*) = \frac{f'(x^*)\,g(x^*) - f(x^*)\,g'(x^*)}{\left[g\left(x^*\right)\right]^2}$$

ESEMPIO

$$\frac{d}{dx} tgx = \frac{d}{dx} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$

DERIVATA di funzione inversa

Sia f:I→R, f invertibile e continua in I.

Se f è derivabile in x^* e $f'(x^*)\neq 0$, allora

la sua inversa è derivabile in $y^*=f(x^*)$ e

$$\left(f^{-1}\right)'(y^*) = \frac{1}{f'(x^*)}$$

ESEMPIO

$$\frac{d}{dy}\log y = \frac{1}{\left.\frac{d}{dx}e^{x}\right|_{x=\log y}} =$$

$$= \frac{1}{e^{\log y}} =$$

$$= \frac{1}{y}$$

In maniera analoga alla precedente,

utilizzando la regola di derivazione della funzione inversa,

si possono **aggiungere** alla tabella delle derivate di funzioni elementari le **seguenti derivate**

TABELLA DELLE DERIVATE DI ALTRE FUNZIONI ELEMENTARI

f(x)	f'(x)	
$\log_a \lvert x \rvert$	$\dfrac{1}{x \log a}$	$x \in R_*, a \in R_*^+ - \{1\}$
$\log \lvert x \rvert$	$\dfrac{1}{x}$	$x \in R_*$
$\operatorname{arcsen} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$\lvert x \rvert < 1$
$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$\lvert x \rvert < 1$
$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{1 + x^2}$	$x \in R$

DERIVATA di funzione composta

Sia definita la funzione $f \circ g$:I→R e sia x^*∈I.

Se g è derivabile in x^* e f è derivabile in $y^* = g(x^*)$, allora $f \circ g$ è derivabile in x^* e

$$\left(f \circ g\right)'(x^*) = f'(g(x^*))\, g'(x^*)$$

ESEMPIO

$$Sia\ \ h(x) = \sqrt{\text{sen } x}$$

$$\Rightarrow \ f(y) = \sqrt{y} \text{ e } g(x) = \text{sen } x$$

$$h(x) = f(g(x))$$

$$\frac{d}{dx}\sqrt{\text{sen } x} = f'(g(x))g'(x) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\text{sen } x}}\cos x$$

ELASTICITA'

In molti *modelli economici*, per esempio quando si studia la **quantità di merce domandata in funzione del prezzo**, è più significativo considerare, ***piuttosto che gli incrementi assoluti delle variabili dipendente e indipendente***, gli **incrementi relativi** (o percentuali) di queste:

$$\frac{x - x^*}{x^*} \quad \text{e} \quad \frac{f(x) - f(x^*)}{f(x^*)}$$

per **due motivi**:

1) **l'incremento percentuale evidenzia meglio l'importanza delle variazioni considerate.** Per es. se x rappresenta un prezzo, una aumento x-x*=100 ha un significato molto diverso a seconda che il prezzo iniziale sia x*=500 o x*=10000 (aumento del 20 % nel primo caso e del 1% nel secondo)

2) **gli incrementi relativi sono numeri puri cioè non dipendono dalle unità di misura usate.** Per es. se si considera la variazione del prezzo x-x*=100, il significato di tale incremento è diverso a seconda che tale prezzo sia calcolato in lire oppure in dollari mentre non importa quale sia l'unità di misura usata se consideriamo l'incremento relativo (il prezzo è aumentato del 10%)

Si chiama ELASTICITA' D'ARCO per una funzione f in un punto x*, il rapporto tra gli incrementi relativi

$$\frac{\dfrac{f(x)-f(x^*)}{f(x^*)}}{\dfrac{x-x^*}{x^*}}=\frac{f(x)-f(x^*)}{x-x^*}\,\frac{x^*}{f(x^*)}$$

Se x→x* ⇒ elasticità puntuale di f in x*

$$E_f(x^*)=f'(x^*)\,\frac{x^*}{f(x^*)}=\frac{f'(x^*)}{\dfrac{f(x^*)}{x^*}}$$

ESEMPIO

Sia q=q(p) la funzione di domanda di un bene rispetto al prezzo p

$$E_q(p) = q'(p)\frac{p}{q(p)}$$

- **Se $E_q(p)=-2$ significa che *in corrispondenza di un aumento del prezzo del 10% si ha una diminuzione della domanda del 20%***
- **Se $E_q(p)=-1/5$ significa che *in corrispondenza di un aumento del prezzo del 10% si ha una diminuzione della domanda del 2%***

DERIVATA E PUNTI DI MAX E DI MIN

Sia f:I→R, x* punto interno di max (o min) relativo, f derivabile in x*

$$\Downarrow$$

$$f'(x^*) = 0$$

NB: x* punto interno di I significa, per definizione, che ∃ I(x*,r)⊂ I

Dimostrazione

x* punto di max rel. $\Rightarrow \exists$ **I(x*,r)$\subset$ I tc $\forall$x$\in$ I(x*,r) f(x)$\le$f(x*)**

$$se \quad x > x^* \quad e \quad x \in I(x^*,r) \quad \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*} \le 0$$

$$se \quad x < x^* \quad e \quad x \in I(x^*,r) \quad \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*} \ge 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to (x^*)^+} \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*} \le 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to (x^*)^-} \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*} \ge 0$$

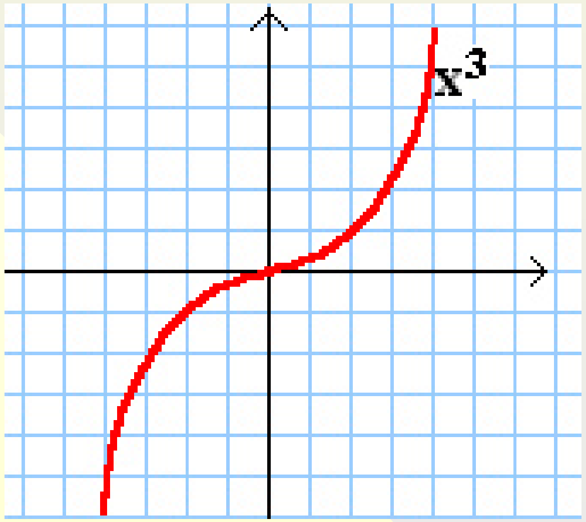
Poiché f derivabile in x* $\Rightarrow \lim_{x \to (x^*)^+} \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*} = \lim_{x \to (x^*)^-} \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*}$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x^*} \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*} = 0$$

NB: L'annullarsi della derivata prima in un punto interno di massimo o minimo relativo è **condizione necessaria ma non sufficiente**

$$Es: f(x) = x^3 \quad f: R \to R$$

$$f'(x) = 3x^2 \qquad f'(0) = 0$$



Come si vede dal grafico **x* non è né di massimo né di minimo relativo**

Alla luce del precedente risultato,

i punti di massimo o minimo relativo si possono trovare:

- **in corrispondenza di punti interni in cui si annulla la derivata prima**
- **in corrispondenza di punti di non derivabilità**
- **in corrispondenza degli estremi dell'intervallo di definizione**

$x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ **sono <u>possibili</u> massimi e minimi relativi**

x_0 p.to di max rel (estremo dell'intervallo)

x_1 p.to di min rel (p.to di non derivabilità)

x_2 p.to di max rel (in cui $f'(x_2) = 0$)

x_3 nè di max nè di min rel

x_4 nè di max nè di min rel (p.to di non derivabilità)

x_5 p.to di min rel (estremo dell'intervallo)

MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI

Poiché un punto di **massimo** (minimo) **assoluto** ***è anche*** punto di **massimo** (minimo) **relativo**,

i punti di massimo (minimo) assoluto,se esistono, si possono trovare facendo un confronto fra i valori assunti dalla funzione in corrispondenza dei possibili punti di massimo (minimo) relativo

Tornando al grafico precedente:

confrontando i valori

$$\left\{ f(x_0),\ f(x_1),.......,\ \ f(x_5) \right\}$$

si vede che $f(x_2)$ è il massimo assoluto e

$f(x_5)$ è il minimo assoluto di f

TEOREMA di Rolle

Sia f:[a,b]→R, f continua in [a,b] e derivabile in (a,b) con $f(a)=f(b)$

$$\Downarrow$$

$$\exists c \in (a,b) : f'(c) = 0$$

Dimostrazione

Per il **T. di Weierstrass** $\Rightarrow$ f dotata di massimo e di minimo

I caso: **il max M e il min m si hanno in corrispondenza degli estremi dell'intervallo**

Poiché $f(a)=f(b) \Rightarrow m=M \Rightarrow f(x)$ **costante** $\Rightarrow f'(x)=0 \ \forall x \in (a,b)$;

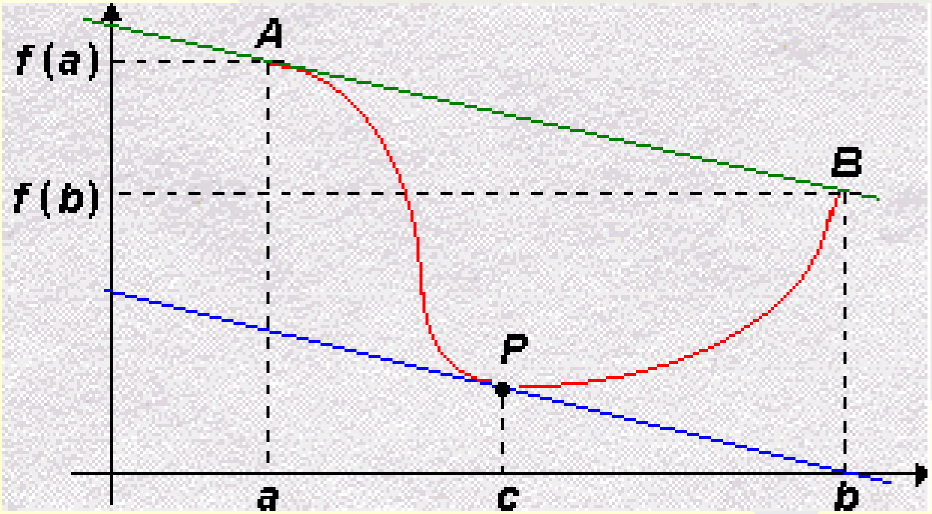
II caso: **almeno uno dei due tra il max M e il min m si ha in corrispondenza di un punto interno. Per fissare le idee sia** x^* **p.to di max interno di** $[a,b]$**. Poiché la funzione è derivabile in** (a,b) **lo è in** x^* $\Rightarrow f'(x^*)=0$

TEOREMA di Lagrange

Sia f:[a,b]→R, f continua in [a,b] e derivabile in (a,b)

$$\Downarrow$$

$$\exists c \in (a,b) : \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$



TEOREMA di Cauchy

Siano $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$, f,g continue in $[a,b]$ e derivabili in (a,b). Se $g'(x)\neq 0\ \forall x\in(a,b)$

$$\Downarrow$$

$$\exists c\in(a,b): \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

DERIVATA E CRESCENZA E DECRESCENZA

Sia $f:(a,b)\rightarrow R$, f derivabile in (a,b)

f **crescente** in (a,b) $\Leftrightarrow$

$f'(x)\geq 0 \ \forall x\in(a,b)$

f **decrescente** in (a,b) $\Leftrightarrow$

$f'(x)\leq 0 \ \forall x\in(a,b)$

Dimostrazione

$\Rightarrow$ f crescente in (a,b) $\Rightarrow$

$$\forall x_0, x_1 \in (a,b), \ \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0$$

$\Leftarrow$

$$\forall x_0, x_1 \in (a,b), \ \exists c \in (x_0, x_1):$$

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(c)$$

Poichè $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in (a,b) \Rightarrow f'(c) \geq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \Rightarrow$$ f crescente in (a,b)

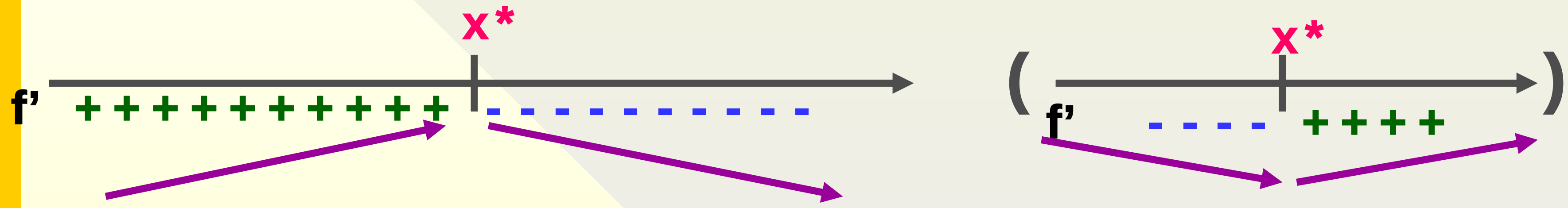
Dato un p.to x* che potrebbe essere di max o di min relativo, (*f'*(*x)=0 o *x** p.to di non derivabilità o *x** estremo dell'intervallo) come si fa a stabilire se esso è veramente di massimo o di minimo relativo?**

Si analizza il comportamento di f nell'intorno del punto

Se f è derivabile nell'intorno di $x^* - \{x^*\}$

$$\begin{cases} f'(x)\ \text{positiva (negativa) nell' intorno sinistro di } x^* \\ f'(x)\ \text{negativa (positiva) nell' intorno destro di } x^* \end{cases}$$

$$\Downarrow$$



$$\Downarrow$$

x* p.to di max (min) relativo

f' positiva (negativa) nell'intorno di $x^*-\{x^*\}$

$\Downarrow$

$\Downarrow$

x^* p.to di crescenza (decrescenza)

Se $f'(x^*)=0 \Rightarrow x^*$ p.to di flesso *a tangente orizzontale*

NB: Se **x* è un estremo** (ad es. quello inferiore), **il segno della derivata nell'intorno destro** permette di stabilire se il punto è di max (o di min) relativo

f' x* + + + + + + + + + + + + + + + + + + +

( )

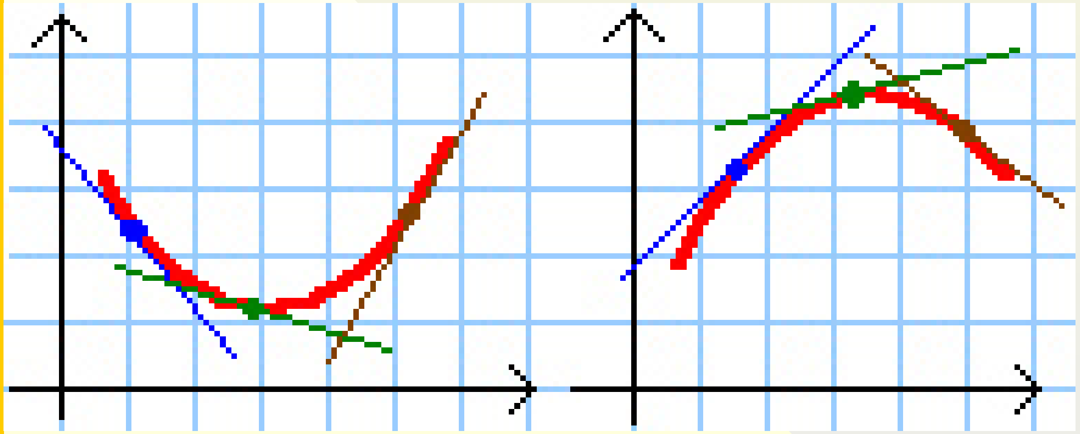
f' x* - - - - - - - - - - -

$\Downarrow$

x* p.to di minimo (massimo) relativo

Sia $f : I \to R$, f dotata di derivata prima e seconda continue in I $\left(f \in C^2(I)\right)$. Si dimostra che:

f <u>convessa</u> (concava) in I ⇔ f''(x)≥0 (≤0) ∀x∈I

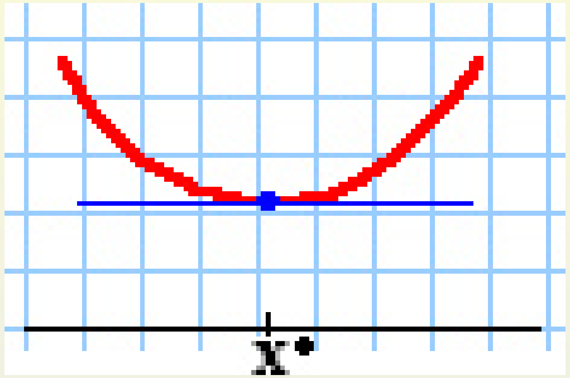


⇔ f' crescente (decrescente)∀x∈I

La derivata seconda fornisce informazioni determinanti per stabilire se un punto di f, x*, in cui f'(x*)=0 sia un punto di max o di min relativo

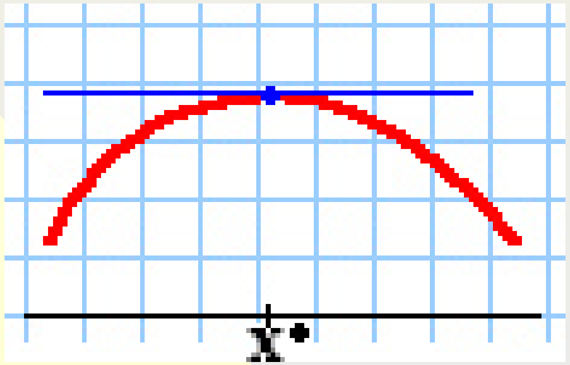
Se f è dotata di derivata prima e seconda continue nel punto x*

$$\begin{cases} f'(x^*) = 0 \\ f''(x^*) > 0 \end{cases} \Rightarrow$$



x* p.to di min relativo

$$\begin{cases} f'(x^*) = 0 \\ f''(x^*) < 0 \end{cases} \Rightarrow$$



x* p.to di max relativo

Se f''(x*)=0?

Sia $f : I \to R$, f dotata in x* di derivate continue fino all'ordine n.

$$Sia\ f'(x^*) = f''(x^*) = f^{(n-1)}(x^*) = 0$$

$$e\ \ f^{n}(x^*) > 0\ \ (< 0)$$

$$\Downarrow$$

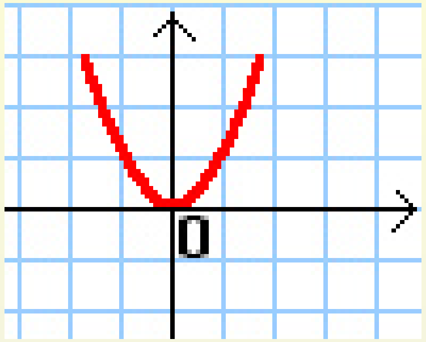
- **se n è pari, x* p.to di min (max) relativo**

- **se n è dispari, x*p.to di crescenza (decrescenza), x* p.to di flesso a tangente orizzontale**

Esempio

1) $f(x) = x^2 \qquad x^* = 0$

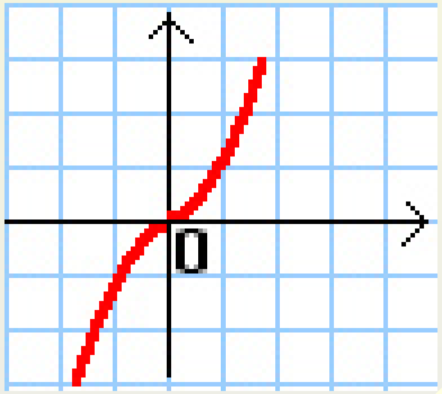
$f'(0) = 0 \quad f''(0) = 2 > 0$



2) $f(x) = x^3 \qquad x^* = 0$

$f'(0) = 0 \quad f''(0) = 0$

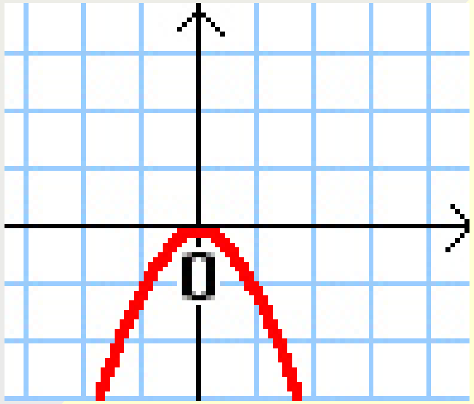
$f'''(0) = 6 > 0$



3) $f(x) = -x^4 \qquad x^* = 0$

$f'(0) = 0 \quad f''(0) = 0$

$f'''(0) = 0 \quad f^{4}(0) = -24 < 0$

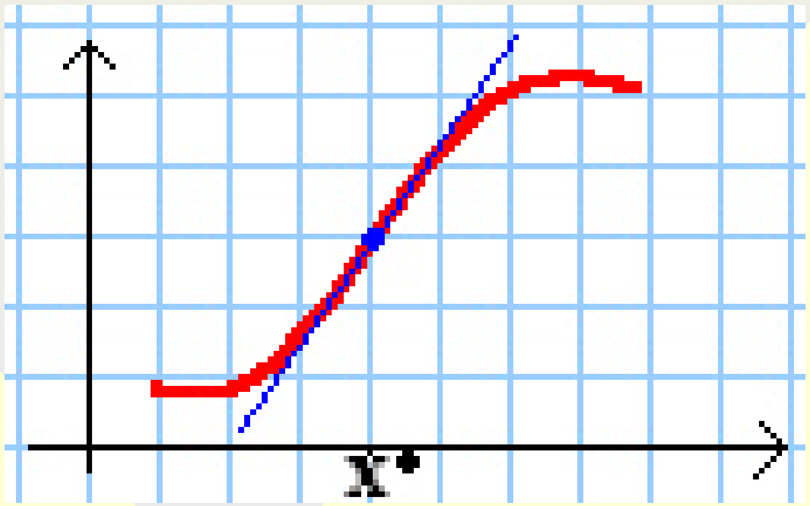


Definizione

$f : I \to R$ Un p.to x* ∈ I in cui f sia derivabile si dice **p.to di flesso se in corrispondenza di esso la funzione cambia la sua convessità** (a sinistra concava e a destra convessa o viceversa)

La tangente alla curva in un p.to di flesso si chiama

tangente di flesso



In base a definizione,

è evidente che <u>se x* è di flesso</u>

ed **f è dotata di derivata seconda in x***

allora

f''(x*)=0

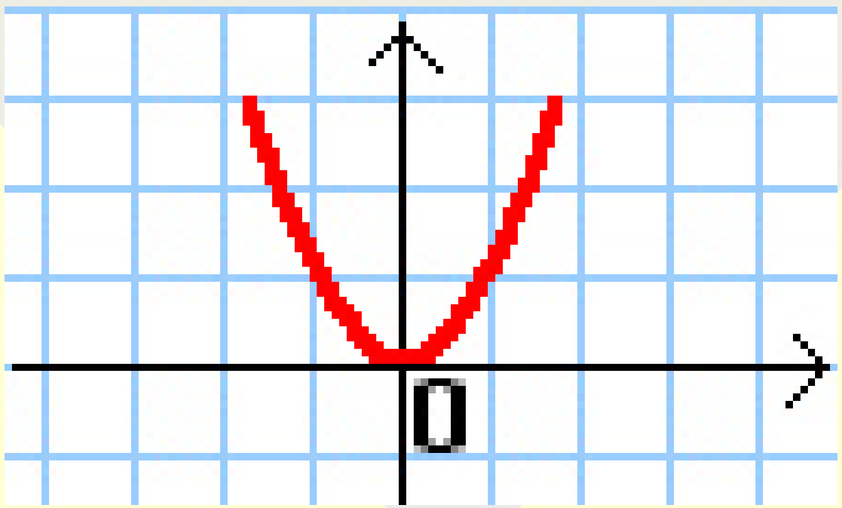
NB: non vale il viceversa. Esempio:

$$per\ \ f(x) = x^4$$

$$si\ ha\ \ f''(0) = 0$$

$$ma\ x^* = 0$$

$$non\ è\ di\ \ flesso$$



$$Sia\ f: I \to R,\ f \in C^2(I)$$

Come stabilire se $x^* \in I$

in corrispondenza del quale $f''(x^*)=0$

sia un p.to di flesso?

x^*

f'' + + + + + + + + + + - - - - - - - - - - -

(x^*)

f'' - - - - + + + +

$\Downarrow$

x^* p.to di flesso

x^*

f'' +

(x^*)

f'' - - - - - - - -

$\Rightarrow$ **x^* non è p.to di flesso**

Esempio

La funzione $f(x) = \frac{x^2}{100} + \frac{x}{50} + 400, \ x > 0$

rappresenta il **costo totale** di una certa merce in funzione della quantità prodotta x.

1) Scrivere l'espressione del **costo medio** $g(x) = \frac{f(x)}{x}$

2) Calcolare il **minimo** e tracciare un **grafico qualitativo di g**.

3) Calcolare poi **l'elasticità** di f e controllare che nel p.to di **min essa è uguale ad 1**.

1) $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{x}{100}+\dfrac{1}{50}+\dfrac{400}{x},\quad x>0$

2) $Dom\,g=R_*^+=\{x\in R : x>0\}$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)=+\infty;\quad \lim_{x\to +\infty} g(x)=+\infty$$

$$g'(x)=\frac{1}{100}-\frac{400}{x^2}=\frac{x^2-40000}{100x^2}\qquad g'(x)=0\ per\ x=\pm 200$$

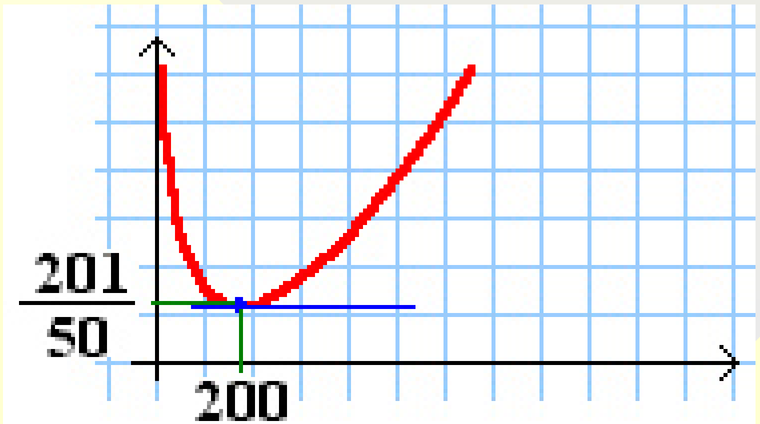
0 200

g' - - - - - - 0 + + + + + + $\Rightarrow$ **200 di min**

$$g''(x)=\frac{800}{x^3}$$

0 200

g'' + + + + + + + + + + + +



3) $$E_f(x) = \frac{\frac{f'(x)}{f(x)}}{x} = \frac{\frac{x}{50} + \frac{1}{50}}{\frac{x}{100} + \frac{1}{50} + \frac{400}{x}}$$

$$E_f(200) = \frac{4 + \frac{1}{50}}{2 + \frac{1}{50} + 2} = 1$$

In x* = 200 il costo marginale coincide con il costo medio.

Questo significa che se si ha un aumento della quantità del 10 %, ad esempio, si avrà un aumento del costo pari anch'esso al 10 %

ASINTOTI

Sia f:R→R

$$\lim_{x \to x^*} f(x) = \pm\infty$$

$$\Downarrow$$

x=x* è

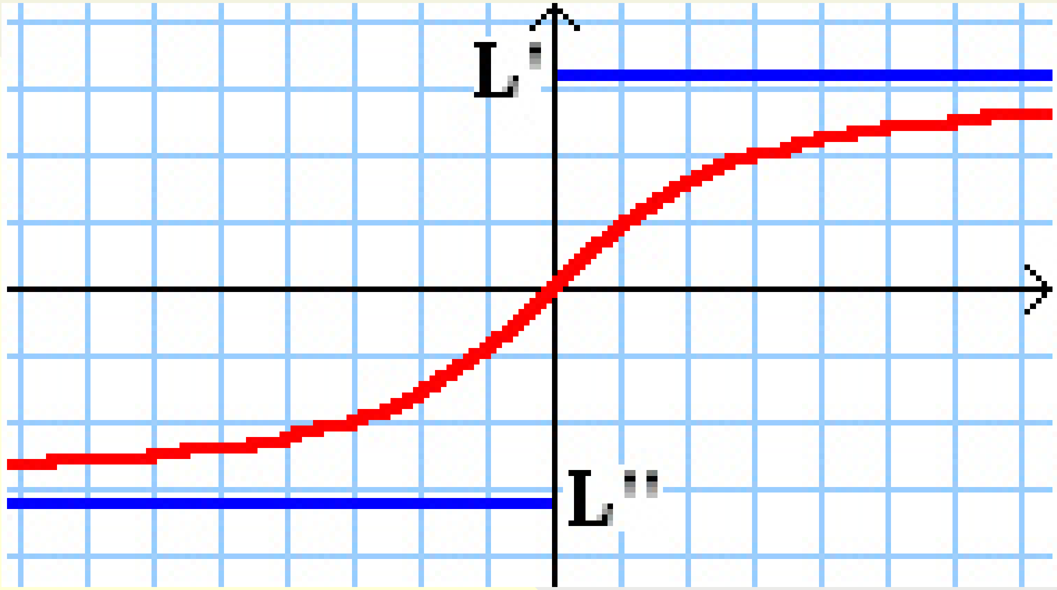
ASINTOTO VERTICALE

Sia f:R→R

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L'$$

$$\left(\lim_{x\to-\infty} f(x) = L''\right)$$

$$\Downarrow$$



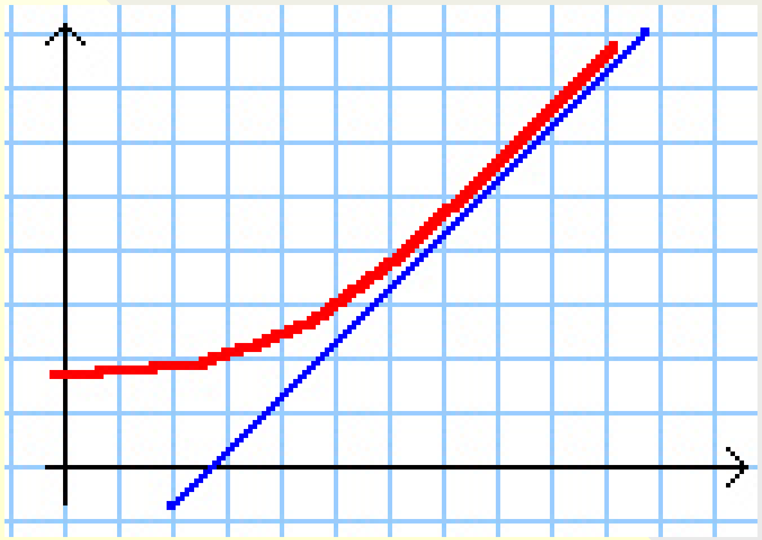
y=L' (L'') è ASINTOTO ORIZZONTALE destro (sinistro)

Una **retta y=mx+n** si definisce ***asintoto obliquo*** destro (sinistro) di f se

$$\lim_{x \to +\infty} \{ f(x) - [mx + n] \} = 0$$

$$\left(\lim_{x \to -\infty} \{ f(x) - [mx + n] \} = 0 \right)$$

$$\Downarrow$$



y=mx+n

è *asintoto obliquo* destro (sinistro) di f(x)

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad e \quad \lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - mx \right] = n$$

$$\left(\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad e \quad \lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - mx \right] = n \right)$$

Esempio

Vediamo se la funzione $g(x) = \frac{x}{100} + \frac{1}{50} + \frac{400}{x}$, precedentemente considerata, **è dotata di asintoto obliquo destro.**

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{100} + \frac{1}{50x} + \frac{400}{x^2} = \frac{1}{100}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) - \frac{1}{100}x = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{100} + \frac{1}{50} + \frac{400}{x} - \frac{x}{100} \right) = \frac{1}{50}$$

$\Rightarrow$ **La funzione è dotata di asintoto obliquo y=(1/100)x+(1/50)**

TEOREMA di de l'Hopital

Teorema 1

Siano $f,g:(a,b)\to R$, $x^*\in(a,b)$. Sia

1) f,g derivabili in $(a,b)-\{x^*\}$,

2) $\lim_{x\to x^*} f(x) = \lim_{x\to x^*} g(x) = 0$

3) $g'(x) \neq 0 \ \forall x\in(a,b)-\{x^*\}$,

4) $\exists \lim_{x\to x^*} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x^*} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x^*} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Teorema 2

Siano $f,g:(a,b)-\{x^*\} \to \mathbb{R}$,

1) f,g derivabili in $(a,b)-\{x^*\}$,

2) $\lim_{x \to x^*} f(x) = \pm\infty \quad e \quad \lim_{x \to x^*} g(x) = \pm\infty$

3) $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)-\{x^*\}$,

4) $\exists \lim_{x \to x^*} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x^*} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x^*} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

NB: per i Teoremi di de l'Hopital non vale il viceversa *Consideriamo*

$$f(x) = 2x + \text{sen}\, x \ e \ g(x) = 2x - \text{sen}\, x$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$$

f e g sono derivabili e

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2 + \cos x}{2 - \cos x} \qquad \nexists$$

$$\text{Cosa si può dire di } \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} ?$$

Nulla a priori

$$\text{Infatti} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{2x + \text{sen}\, x}{2x - \text{sen}\, x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2 + \frac{\text{sen}\, x}{x}}{2 - \frac{\text{sen}\, x}{x}} = 1$$

Esempio: Calcolare

$$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{x}+\frac{1}{1-e^{x}}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{x}+x}{x(1-e^{x})}=\frac{0}{0}$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{-e^{x}+1}{1-e^{x}-xe^{x}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-e^{x}+1}{1-e^{x}-xe^{x}}=\frac{0}{0}$$

$$\frac{f''(x)}{g''(x)}=\frac{-e^{x}}{-e^{x}-e^{x}-xe^{x}}=\frac{-1}{-2-x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\frac{1}{2}$$